

BARYCENTRE

Le plan (P) et rapporté à un repère $R(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) Barycentre de deux points pondérés.

1-1) Soit A un point et α un réel non nul ; le couple (A, α) s'appelle un point pondéré.

Plusieurs points pondérés constituent un système pondéré

1-2) Barycentre de deux points pondérés.

a) Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré tel que $\alpha + \beta \neq 0$; le barycentre du système pondéré Σ est le point G qui vérifie : $\alpha \vec{AG} + \beta \vec{BG} = \vec{0}$

On écrit : $G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

1-3) Propriétés de barycentre

a) Le barycentre d'un système pondéré de deux points ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul

b) Si $\alpha = \beta$ le barycentre du système pondéré $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ s'appelle l'isobarycentre de A et B qui n'est que le milieu du segment $[AB]$.

c) Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que : $\alpha + \beta \neq 0$ et $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$. Pour tout point M du plan (P) on a : $\vec{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \vec{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{MB}$

ou $(\alpha + \beta) \vec{MG} = \alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB}$ Cette propriété s'appelle la propriété caractéristique du barycentre et on a : $\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB}$

d) Si $G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ alors les points A, B et G sont alignés.

e) Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ des points du plan

et $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ on a : $\vec{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \vec{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{OB}$

et donc on a les coordonnées de G :
$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \end{cases}$$

2) Barycentre de trois points pondérés

2-1) Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

Il existe un et un seul point G qui vérifie

$\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} = \vec{0}$ Et s'appelle le barycentre du système pondéré Σ

2-2) Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ si M est un point quelconque dans le plan (P)

on a : $\vec{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{MB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{MC}$

donc : $(\alpha + \beta + \gamma) \vec{MG} = \alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC}$

2-3) Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$ des points du plan

et $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

on a : $\vec{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{OB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{OC}$

et donc les coordonnées de G :

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \end{cases}$$

2-4) Propriétés :

a) Le barycentre d'un système pondéré de trois points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre non nul : pour $k \neq 0$

$\text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} = \text{Bar}\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma)\}$

b) La propriété d'associativité :

Si $G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$

et $G' = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

Alors : $G = \text{Bar} \{(G', (\alpha + \beta)); (C, \gamma)\}$

Remarque : La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de trois points pondérés.

c) **Cas particulier** : Si les poids $\alpha; \beta$ et γ sont égaux le barycentre de $\{(A, \alpha); (B, \alpha); (C, \alpha)\}$

S'appelle le **centre de gravité** du triangle ABC .

d) Barycentre de quatre points pondérés

Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$. Il existe un et un seul point G qui vérifie : $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} + \delta \vec{GD} = \vec{0}$

Et si $G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$

Et M est un point quelconque dans le plan (P)

Alors on a : $\vec{MG} = \frac{\alpha}{s} \vec{MA} + \frac{\beta}{s} \vec{MB} + \frac{\gamma}{s} \vec{MC} + \frac{\delta}{s} \vec{MD}$

où $s = \alpha + \beta + \gamma + \delta$

e) Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$ et $D(x_D; y_D)$

des points du plan

Et si $G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$

Alors : les coordonnées de G sont :

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C + \delta x_D}{s} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C + \delta y_D}{s} \end{cases}$$

où $s = \alpha + \beta + \gamma + \delta$

f) Le barycentre d'un système pondéré de quatre points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre

g) Si $G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$

Avec $\alpha + \beta \neq 0$ et $\gamma + \delta \neq 0$ Si $G' = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

Et $G'' = \text{Bar} \{(C, \gamma); (D, \delta)\}$

Alors $G = \text{Bar} \{(G', (\alpha + \beta)); (G'', (\gamma + \delta))\}$

